«Теория принятия решений»

Тема 3. **Оценка эффективности решений**

Лекция. **Шкалы измерений**

Цель: Изложить основные положения, связанные со шкалированием характеристик сложных систем.

Время - 2 часа

Учебные вопросы:

1. *Понятие шкалы*
2. *Типы шкал*
3. *Обработка результатов измерений*

1. Понятие шкалы

В основе оценки эффективности, как впрочем, и любого другого оценивания, лежит процесс сопоставления значений качественных или количественных характеристик изучаемой системы значениям соответствующих шкал. Исследование характеристик привело к выводу о том, что все возможные шкалы принадлежат к одному из нескольких типов, определяемых перечнем допустимых операций на этих шкалах.

Формально шкалой называется кортеж из трех элементов <*X*, φ, *Y*>, где *X* – реальный объект, *Y* – шкала, φ - гомоморфное отображение X на Y.

В современной теории измерений определено следующее:

1. $X = \{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n, R_x\}$ - эмпирическая система с отношением, включающая множество свойств x_i, на которых в соответствии с целями измерения задано некоторое отношение R_x. В процессе измерения необходимо каждому свойству $x_i \in X$ поставить в соответствие признак или число, его характеризующее. Например, если целью измерения является выбор, то элементы x_i рассматриваются как альтернативы, а отношение R_x должно позволять сравнивать эти альтернативы.

2. $Y = \{\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n), R_y\}$ - знаковая система с отношением, являющаяся отображением эмпирической системы в виде некоторой образной или числовой системы, соответствующей измеряемой эмпирической системе.

3. $\varphi \in \Phi$ - гомоморфное отображение *X* на *Y*, устанавливающее соответствие между *X* и *Y* так, что $\{\varphi(x_1), \varphi(x\ ), ..., \varphi(x_n)\} \in R_y$ только тогда, когда $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R_x$.

Тип шкалы определяется по $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, множеству допустимых преобразований $x_i \to y_i$.

В соответствии с приведенными определениями, охватывающими как количественные, так и качественные шкалы, измерение эмпирической системы *X* с отношением R_x состоит в определении знаковой системы *Y* с отношением R_y, соответствующей измеряемой системе. Предпочтения R_x на множестве $X \times X$ в результате измерения переводится в знаковые (в том числе и количественные) соотношения R_y, на множестве $Y \times Y$.

2. Типы шкал

Шкалы номинального типа

Самой слабой качественной шкалой является *номинальная шкала* (*шкала наименований, классификационная шкала*), по которой объектам x_i или их неразличимым группам дается некоторый признак. Основным свойством этих шкал является сохранение неизменными отношений равенства между элементами эмпирической системы в эквивалентных шкалах.

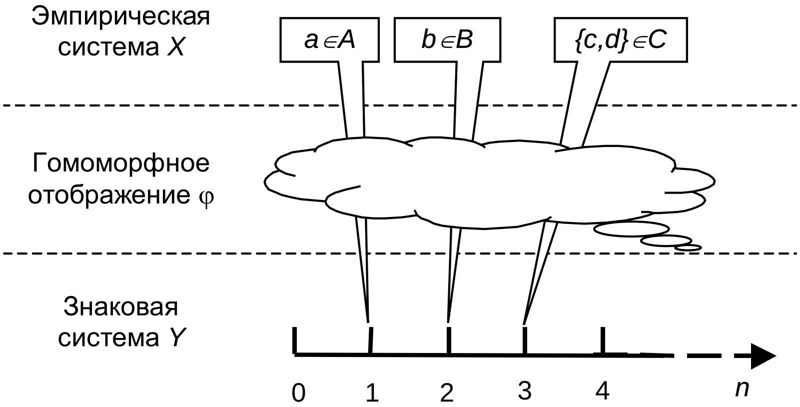
Шкалы номинального типа задаются множеством взаимно однозначных допустимых преобразований шкальных значений.

Название «номинальный» объясняется тем, что такой признак дает лишь ничем не связанные имена объектам. Эти значения для разных объектов либо совпадают, либо различаются. Никакие более тонкие отношения между значениями не фиксируются. Шкалы номинального типа допускают только различение объектов на основе проверки выполнения отношений на множестве этих элементов.

Рассматриваемый тип шкал соответствует простейшему виду измерений, при котором шкальные значения используются только как имена объектов. По этой причине шкалы номинального типа называют также шкалами наименований.

Примеры измерений в номинальных шкалах: номера автомашин, телефонов, коды городов, лиц, объектов и т.д. Единственная цель таких измерений – выявление различий между объектами разных классов. Если каждый класс состоит из одного объекта, то шкала наименований используется для различения объектов.

Пример. Измерение в номинальной шкале объектов, представляющих три множества элементов A, B и C. Эмпирическую систему представляют четыре элемента:$a \in A$, $b \in B$ и $\{c,d\} \in C$. Знаковая система представлена цифровой шкалой наименований, включающей в себя элементы 1, 2, ,,, , n и сохраняющей отношение равенства. Гомоморфное отношение φ ставит в соответствие каждому элементу из эмпирической системы определенный элемент знаковой системы.



Особенности номинальных шкал.

1. Элементам c и d поставлено в соответствие одно и то же значение шкалы измерения. Это означает, что при измерении эти элементы не различаются.

2. При измерении в шкале наименований символы 1, 2, ... , n, используемые в качестве шкальных значений, являются не числами, а лишь символами (знаками), служащими для обозначения и установления различия объектов. Так символ 2 не считается вдвое или на единицу больше символа 1.

Любая обработка результатов измерений в номинальной шкале должна учитывать эти особенности. В противном случае возможны ошибочные выводы по оценке систем, не соответствующие действительности.

Шкалы порядка

Шкала называется *шкалой порядка* (*ранговой шкалой*), если множество Φ состоит из всех монотонно возрастающих допустимых преобразований шкальных значений.

Монотонно возрастающим является такое преобразование $\varphi(x)$, которое удовлетворяет условию: если $x_1>x_2$, то $\varphi(x_1)> \varphi(x_2)$ для любых шкальных значений x из области определения $\varphi(x)$. Порядковый тип шкал допускает не только различие объектов (как номинальный тип(, но и используется для упорядочения объектов по измеряемым свойствам. Измерение в порядковой шкале применяется, например, в следующих ситуациях:

1) необходимо упорядочить объекты во времени или пространстве, Это выполняется, когда интересуются не сравнением степени выраженности какого-либо их свойства, а лишь взаимным временным или пространственным расположением;

2) требуется упорядочить объекты в соответствии с каким-либо свойством, но не требуется проводить его измерение;

3) какое-либо свойство в принципе измеримо, но в настоящий момент не может быть измерено по причинам теоретического или практического характера.

Примеры. Шкала твердости минералов, шкала силы ветра, шкала силы землетрясения, шкала сортности товаров в торговле, различные социальные шкалы и т.п.

Любая шкала, полученная из порядковой шкалы S с помощью монотонно возрастающего преобразования шкальных значений, будет также точной шкалой порядка для исходной эмпирической системы с отношениями.

Шкалы интервалов

Одним из наиболее важных типов шкал является *интервальная шкала*. К этому типу относятся шкалы, единственные с точностью до множества положительных линейных преобразований вида $\varphi(x) = ax + b,$ где $x \in Y$ - шкальные значений из области определения *Y, a*>0, *b* – любое число.

Основным свойством этих шкал является сохранение неизменными отношений интервалов в эквивалентных шкалах:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{\varphi(x_3) - \varphi(x_4)} = const.$$

Отсюда и происходит название данного типа шкал.

Примеры шкал интервалов – шкалы температур. Переход от одной шкалы к эквивалентной, например, от шкалы Цельсия к шкале Фаренгейта, задается линейным преобразованием шкальных значений: $t°F = 1{,}8t°C + 32.$

Другой пример измерения в интервальной шкале – признак «дата свершения события», поскольку для измерения времени в конкретной шкале необходимо фиксировать масштаб (*a*) и начало отсчета (*b*). Христианский (григорианский) и мусульманский календари – две конкретизации шкал интервалов.

Шкалы интервалов, также как номинальная и порядковая, сохраняют различие и упорядочение измеряемых объектов. Но, кроме того они сохраняют и отношение расстояний между парами объектов. Так запись

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} = K$$

означает, что расстояние между x_1 и x_2 в K раз больше расстояния между x_3 и x_4, и в любой шкале это значение сохраняется. При этом отношения самих оценок не сохраняются.

В социологических исследованиях в шкалах интервалов обычно измеряют временные и пространственные характеристики объектов. Например, даты событий, стаж, возраст, время выполнения заданий и т.д.

Шкалы отношений

Шкалой отношений (*подобия*) называется шкала, если Φ состоит из преобразований подобия $\varphi(x) = ax,$ где $x \in Y$ - шкальные значений из области определения *Y, a* –действительные числа.

Нетрудно убедиться, что в шкалах отношений остаются неизменными отношения численных оценок объектов. Действительно, пусть в одной шкале объектам O_1 и O_2 соответствуют значения x_1 и x_2, а в другой – $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$, где $a>0$ произвольное действительное число. Тогда имеем:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} = \frac{ax_1}{ax_2}.$$

Данное соотношение объясняет название шкал отношения. Примеры измерений в шкалах отношений – измерения массы и длины объектов. Известно, что при измерении массы используется большое разнообразие численных оценок. Так, проводя измерение в килограммах, получают одно значение, при измерении в фунтах – другое и т.д. Однако, в какой бы системе физических единиц ни проводилось измерение массы, отношение масс любых объектов одинаково. Оно не меняется при переходе к другой, эквивалентной системе. Этим же свойством обладает и измерение длин предметов и расстояний между ними.

Шкалы отношений отражают отношение свойств объектов, т.е. во сколько раз свойство одного объекта превосходит это же свойство другого объекта.

Шкалы отношений образуют подмножество шкал интервалов фиксированием нулевого значения параметра b, т.е. b=0. Такая фиксация означает задание нулевой точки отсчета шкальных значений для всех шкал отношений. Переход от одной шкалы отношений к другой, эквивалентной ей шкале осуществляется с помощью преобразования подобия (растяжения – сжатия), т.е. изменением масштаба измерений. Шкалы отношений, являясь частным случаем шкал интервалов, при выборе нулевой точки отсчета сохраняют не только отношения свойств объектов, но и отношения расстояния между парами объектов.

Шкалы разностей

Шкалы разностей определяются как шкалы единственные с точностью до преобразований сдвига $\varphi(x) = x + b,$ где $x \in Y$ - шкальные значений из области определения *Y, b* – действительное число. Это означает, что при переходе от одной числовой системы к другой меняется лишь начало отсчета.

Эти шкалы применяются в тех случаях, когда необходимо измерить, насколько один объект превосходит по определенному свойству другой объект. В них неизменными остаются разности численных оценок свойств, Действительно, если в одной шкале объектам O_1 и O_2 соответствуют значения x_1 и x_2, а в другой – $\varphi(x_1) = x_1 + b$ и $\varphi(x_2) = x_2 + b$, то имеем:

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (x_1 + b) - (x_2 + b) = x_1 - x_2.$$

Примерами измерений в шкалах разностей являются измерения прироста продукции предприятия в текущем году по сравнению с предыдущим, увеличение численности учреждений, количество приобретенной техники за год.

Другим примером измерения в шкале разностей является летоисчисление (в годах). Переход от одного летоисчисления к другому («от сотворения мира» – «от Рождества Христова») осуществляется изменением начала отсчета.

Как и шкалы отношений, шкалы разностей являются частным случаем шкал интервалов, Они получаются из последних фиксацией параметра a: (a=1), т.е. выбором единицы масштаба измерений. Точка отсчета в шкалах разностей может быть произвольной.

Шкалы разностей, как и шкалы интервалов, сохраняют отношения интервалов между оценками пар объектов, но, в отличие от шкал отношений не сохраняют отношения оценок свойств объектов

Абсолютные шкалы

Абсолютными называют шкалы, в которых единственными допустимыми преобразованиями Φ являются тождественные преобразования: $\varphi(x) = \{e\},$ где $e(x)=x$.

Это означает, что существует только одно отображение эмпирических объектов в числовую систему. Отсюда и название шкалы, так как для нее единственность измерения понимается в буквальном абсолютном смысле.

Абсолютные шкалы применяются, например, для измерения количества объектов, предметов, событий, решений и т.п. В качестве шкальных значений при измерении количества объектов используются натуральные числа, когда объекты представлены целыми единицами, и действительные числа, если кроме чисел присутствуют и части объектов.

Абсолютные шкалы являются частным случаем всех ранее рассмотренных шкал, поэтому сохраняют любые соотношения между числами – оценками измеряемых свойств объектов: различие, порядок, отношение интервалов, отношение и разность значений и т.д.

Кроме указанных ранее существуют промежуточные типы шкал: *степенная* шкала $\varphi(x) = ax^b; a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1,$ и ее разновидность – *логарифмическая* шкала $\varphi(x) = x^b; b > 0, b \neq 1.$

Некоторые шкалы являются равносильными (изоморфными). Так равносильны шкала интервалов и степенная шкала. Логарифмическая шкала равносильна шкале разностей и шкале отношений.

Используются понятия «сильной» и «слабой» шкал. Качественные шкалы (номинальная и порядковая), принято относить к разряду слабых, Остальные шкалы (количественные) считают сильными. При этом шкала тем «сильнее», чем меньше свободы в выборе преобразования $\varphi(x)$.

3. Обработка результатов измерений

Особенностью измерения и оценки качества сложных систем является то, что для одной системы по разным частным показателям могут применяться любые из типов шкал – от самых слабых до сильных. При этом для получения надежного значения показателя может проводиться несколько измерений. Кроме того, обобщенный показатель системы может представлять собой некую осредненную величину по отношению к однородным частным показателям.

При измерении и оценке физических величин обычно трудностей не возникает, так указанные величины измеряются в абсолютной шкале. Измерение антропометрических характеристик (рост, вес) осуществляется в шкале отношений. Более сложной является оценка в качественных шкалах. Однако отдельные показатели в процессе системного анализа могут уточняться. Поэтому появляется возможность перехода от измерения и оценки в качественных шкалах к выполнению этих процедур в шкалах количественных.

В любом случае при работе с величинами, измеренными в разных шкалах, необходимо соблюдать определенные правила. Иначе могут возникать просчеты при оценке систем.

Проиллюстрируем широко распространенную ошибку при использовании балльной оценки.

Пусть на экспертизу представлены две системы *A* и *B*, оцениваемые по свойствам y_1, y_2, y_3, y_4. Качество каждой системы оценивается как среднеарифметическое по пятибалльной системе, оценка округляется и, вследствие этого, является не вполне точной. Так свойства, имеющие фактический уровень 2,6 и 3,4 балла, получат одинаковую оценку 3 балла. Результаты экспертизы сведены в таблицу.

Свойство системы	Система *A*		Система *B*	
	истинная	в баллах	истинная	в баллах
y_1	4,4	4	3,6	4

y_2	3,3	3	3,7	4
y_3	2,4	2	2,6	3
y_4	4,4	4	2,6	3
Суммарная оценка	14,5	13	12,5	14

Избежать ошибок можно, используя результаты, полученные в теории шкалирования, они определяют правила и перечень допустимых операций осреднения характеристик, Остановимся на *правилах осреднения*.

Проводить осреднение допускается только для однородных характеристик, измеренных в одной шкале. Иными словами, осредняются только такие значения, которые представляют собой или оценки различных измерений одной и той же характеристики, или оценки нескольких различных однородных характеристик.

Каждое значение показателя может иметь для исследователя различную ценность, которую учитывают с помощью коэффициентов значимости (весовых коэффициентов) c_i, причем должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.

Наиболее часто применяют следующие основные формулы осреднения, приведенные в таблице.

Наименование вида осреднения	Расчетная формула
Средневзвешенное арифметическое	$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$
Среднеарифметическое, частный случай средневзвешенного арифметического при равнозначности измерений	$y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$
Среднеквадратичное	$y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$
Средневзвешенное геометрическое	$y = \prod_{i=1}^{n} y_i^{c_i}$
Среднегеометрическое, частный случай средневзвешенного геометрического при равнозначности измерений	$y = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i}$
Средневзвешенное гармоническое	$y = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{-1}\right)^{-1}$
Среднегармоническое	$y = n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{-1}\right)^{-1}$

Укажем области применения этих операций (процедур) осреднения.

Простая и взвешенная величины различаются не только по величине (не всегда), по способу вычисления, но и по роли в решении задач системного анализа. Средневзвешенные величины используются для сравнения систем с учетом вклада различных факторов в общую оценку.

Среднеарифметическое значение используется в случаях, когда важно сравнить значения какой-нибудь характеристики нескольких систем (например, скорость печати принтеров различных типов или марок).

Если при замене индивидуальных значений показателя на среднюю величину требуется сохранить неизменной сумму квадратов исходных величин (измерение вариации характеристики в совокупности), то используется *среднеквадратичное*. Например, при определении местоположения источника радиоизлучения в радиоразведке вычисляется среднеквадратичное отклонение нескольких измерений.

Среднегеометрическое, в свою очередь, используется для определения относительной разности отдельных значений при необходимости сохранения произведения индивидуальных величин тогда, когда среднее значение качественно удалено от максимального и минимального значений, т.е., когда важны не абсолютные значения, относительный разброс характеристик. Например, если максимальная производительность процессора на операциях с данными целочисленного типа составляет для сжатия текстового файла 10^6 условных единиц, а для сжатия графических изображений – 10^2, то какую величину следует считать средней? Среднеарифметическое качественно однородно с максимальным ($\approx$ 500 000 единиц) и резко отличается от минимального значения. Среднегеометрическое дает вроде бы логически верный ответ: 10 000. Одинаково удалено и от миллиона, и от сотни. В статистике среднегеометрическое находит применение при определении средних темпов роста.

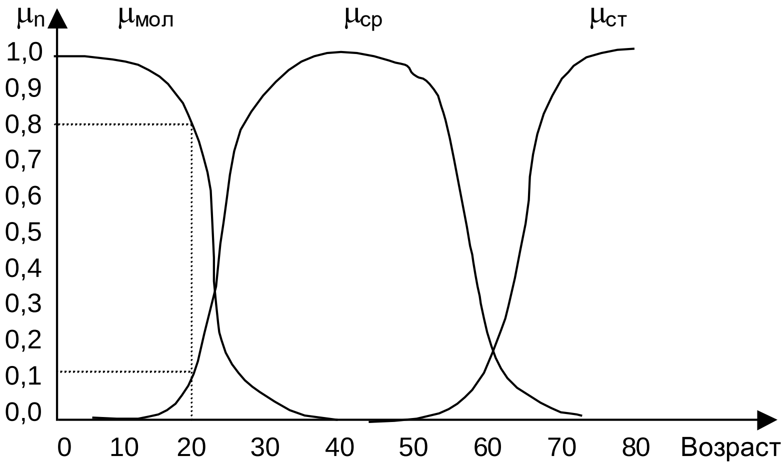
Среднегармоническое используется, если необходимо, чтобы неизменной оставалась сумма величин, обратных индивидуальным значениям характеристик. Например, в режиме обмена данными средняя скорость передачи по прямому каналу составляет 64 Кбит/с, а по обратному каналу – 2, 4 Кбит/с. Какова средняя скорость обмена данными? При замене индивидуальных значений скорости необходимо, чтобы неизменной величиной осталось время обмена данными в обе стороны.

Таким образом, $v_{cp} = 2\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{2,4}\right)^{-1} = 4,8\ \text{Кит/сс.}$

Вопрос о применении средних величин в настоящее время исследован довольно полно. К сожалению, этого нельзя сказать о средневзвешенных. Опыт показывает одну из областей применения средневзвешенного арифметического. Эта величина наиболее часто применяется как обобщенный линейный критерий (аддитивная свертка) при сведении векторной задачи к скалярной, при осреднении показателей. Средневзвешенное значение допустимо использовать тогда и только тогда, когда значения частных показателей измерены в шкале отношений.

Перспективы теории шкалирования таковы. Наиболее актуальным представляется расширение понимания шкалы путем привлечения понятий нечеткой логики и лингвистических переменных, используемых в теории нечетких множеств. Обобщение понятия характеристической функции путем перехода к понятию функции принадлежности $\mu_n \in [0,1]$, используемой в этой теории, создает базу для введения более тонкой структуры измерения качественных характеристик и учета неопределенностей, свойственных сложным системам, на основе понятия нечеткой шкалы.

Например, пусть рассматривается нечеткое множество – возраст людей. Нечеткими переменными (шкальными значениями), означающими возраст, являются лингвистические переменные «молодой», «среднего возраста», «старый» с приписанными им функциями принадлежности. При этом 20-летний человек относится к нечеткому подмножеству возраста «молодой» со значением функции принадлежности $\mu_{мол}$=0,8, и он же с функцией принадлежности $\mu_{ср}$=0,1 относится к нечеткому подмножеству возраста «средний».


μп
μмол
μср
μст
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
Возраст